

中微第五次作业

答案详解版

说明：本次作业集中在寡头竞争、价格博弈、进入博弈、重复博弈和不完全信息古诺博弈。

第 1 题：Stackelberg、Bertrand、卡特尔与背叛

解：两个企业成本相同：

$$C_i(y_i) = 10y_i,$$

所以边际成本为

$$MC_i = 10.$$

行业反需求函数为

$$p = 110 - 0.5y, \quad y = y_1 + y_2.$$

因此每单位价格减去边际成本为

$$p - 10 = 100 - 0.5(y_1 + y_2).$$

(1) 企业 1 为 Stackelberg 领头企业

企业 2 作为跟随者，在观察到 y_1 后选择 y_2 最大化自身利润：

$$\pi_2 = (p - 10)y_2 = [100 - 0.5(y_1 + y_2)]y_2.$$

对 y_2 求导：

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial y_2} = 100 - 0.5y_1 - y_2 = 0.$$

所以企业 2 的反应函数为

$$y_2 = 100 - 0.5y_1.$$

企业 1 预见该反应函数，其利润为

$$\pi_1 = [100 - 0.5(y_1 + y_2)]y_1.$$

代入 $y_2 = 100 - 0.5y_1$ ：

$$\pi_1 = [100 - 0.5(y_1 + 100 - 0.5y_1)]y_1 = (50 - 0.25y_1)y_1.$$

对 y_1 求导：

$$\frac{d\pi_1}{dy_1} = 50 - 0.5y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 100.$$

于是

$$y_2 = 100 - 0.5 \times 100 = 50.$$

总产量为 150，价格为

$$p = 110 - 0.5 \times 150 = 35.$$

企业 1 利润为

$$\pi_1 = (p - 10)y_1 = (35 - 10) \times 100 = 2500.$$

所以题目所问的领头企业产量和利润为

$$y_1^S = 100, \quad \pi_1^S = 2500.$$

补充：企业 2 利润为 $(35 - 10) \times 50 = 1250$ 。

(2) 两个企业同时决定价格

这是同质产品 Bertrand 价格竞争。两个企业边际成本相同且为 10。若某企业定价高于对方，会失去全部市场；若定价高于边际成本且两者价格相同，任一企业都可以略微降价来抢占全部市场。因此唯一均衡价格为

$$p = MC = 10.$$

市场总需求量满足

$$10 = 110 - 0.5y \quad \Rightarrow \quad y = 200.$$

若两企业同价时平分市场，则

$$y_1 = y_2 = 100.$$

由于价格等于边际成本，利润为零：

$$\pi_1 = \pi_2 = 0.$$

因此

$$p = 10, \quad y_1 = y_2 = 100, \quad \pi_1 = \pi_2 = 0.$$

这就是 Bertrand 悖论：只要企业生产同质产品、成本相同并进行价格竞争，即使只有两个企业，价格也会被压到边际成本。

(3) 卡特尔平分市场，以及企业 1 背叛

若两个企业组成卡特尔，它们会像一个垄断者一样选择行业总产量 y 。总利润为

$$\Pi = (p - 10)y = (100 - 0.5y)y.$$

一阶条件：

$$\frac{d\Pi}{dy} = 100 - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y^M = 100.$$

垄断价格为

$$p^M = 110 - 0.5 \times 100 = 60.$$

若平分市场，则

$$y_1 = y_2 = 50.$$

每个企业利润为

$$\pi_i = (60 - 10) \times 50 = 2500.$$

所以卡特尔平时：

$$y_1 = y_2 = 50, \quad \pi_1 = \pi_2 = 2500.$$

如果企业 2 不背叛，仍生产 50，企业 1 选择最优背叛产量 y_1 。企业 1 利润为

$$\pi_1 = [100 - 0.5(y_1 + 50)]y_1 = (75 - 0.5y_1)y_1.$$

一阶条件：

$$\frac{d\pi_1}{dy_1} = 75 - y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 75.$$

此时总产量为 125，价格为

$$p = 110 - 0.5 \times 125 = 47.5.$$

企业 1 背叛利润为

$$\pi_1 = (47.5 - 10) \times 75 = 37.5 \times 75 = 2812.5.$$

所以

$$y_1^D = 75, \quad \pi_1^D = 2812.5.$$

背叛利润 2812.5 大于守约利润 2500，这说明卡特尔在一次性博弈中具有内在不稳定性。

第 2 题： n 个古诺厂商与合并的外部效应

解：需求曲线为

$$p = a - Q,$$

每个厂商边际成本为 c 。设

$$A = a - c > 0.$$

则厂商 i 的利润可写为

$$\pi_i = (p - c)q_i = (a - Q - c)q_i = (A - Q)q_i.$$

(1) 所有厂商独立生产

若共有 n 个厂商同时选择产量，厂商 i 的利润为

$$\pi_i = \left(A - q_i - \sum_{j \neq i} q_j \right) q_i.$$

对 q_i 求一阶条件：

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - 2q_i - \sum_{j \neq i} q_j = 0.$$

对称均衡中 $q_i = q$ ，所以

$$A - 2q - (n-1)q = 0 \quad \Rightarrow \quad A - (n+1)q = 0.$$

于是

$$q^* = \frac{A}{n+1} = \frac{a-c}{n+1}.$$

行业总产量为

$$Q^* = nq^* = \frac{n(a-c)}{n+1}.$$

价格为

$$p^* = a - Q^* = a - \frac{n(a-c)}{n+1} = \frac{a+nc}{n+1}.$$

每个厂商的利润为

$$\pi_i^* = (p^* - c)q^*.$$

注意

$$p^* - c = \frac{a+nc}{n+1} - c = \frac{a-c}{n+1}.$$

所以

$$\pi_i^* = \left(\frac{a-c}{n+1} \right)^2.$$

答案为

$$\boxed{q_i^* = \frac{a-c}{n+1}, \quad Q^* = \frac{n(a-c)}{n+1}, \quad \pi_i^* = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2}.$$

(2) n 个厂商中有 $m - 1$ 个厂商合并

$m - 1$ 个厂商合并以后，它们作为一个统一决策的主体选择产量。原来 n 个厂商中，未合并的厂商数为

$$n - (m - 1) = n - m + 1.$$

再加上一个合并后的企业集团，市场中的战略决策者总数为

$$K = (n - m + 1) + 1 = n - m + 2.$$

在古诺模型中，若有 K 个对称的战略决策者，每个决策者的均衡产量为

$$q^K = \frac{a - c}{K + 1}.$$

因此这里

$$q^K = \frac{a - c}{n - m + 3}.$$

所以：

1. 合并企业集团的总产量为

$$q_M = \frac{a - c}{n - m + 3};$$

2. 每个未合并企业的产量为

$$q_O = \frac{a - c}{n - m + 3};$$

3. 每个战略决策者的利润为

$$\pi^K = \frac{(a - c)^2}{(n - m + 3)^2}.$$

因此合并集团的总利润为

$$\pi_M = \frac{(a - c)^2}{(n - m + 3)^2}.$$

每个未合并企业利润为

$$\pi_O = \frac{(a - c)^2}{(n - m + 3)^2}.$$

如果合并集团内部把利润平均分给原来的 $m - 1$ 家企业，则每家合并内企业的平均利润为

$$\frac{1}{m - 1} \cdot \frac{(a - c)^2}{(n - m + 3)^2}.$$

(3) 合并外企业为什么会获利

合并前每个企业利润为

$$\pi^{\text{before}} = \frac{(a - c)^2}{(n + 1)^2}.$$

合并后，未合并企业利润为

$$\pi_O^{\text{after}} = \frac{(a - c)^2}{(n - m + 3)^2}.$$

只要是真正减少竞争者数量的合并，即 $m - 1 \geq 2$ ，就有

$$n - m + 3 < n + 1.$$

因此

$$\pi_O^{\text{after}} > \pi^{\text{before}}.$$

这说明合并具有正的外部效应：合并者减少市场上的战略竞争主体，行业总产量下降、价格上升；未参与合并的企业不需要付出合并成本，却享受更高价格带来的利润增加。这也是为什么古诺模型中合并常常存在“搭便车”问题：合并外企业可能比合并内企业更受益。

第 3 题：进入博弈的报酬矩阵与纳什均衡

解：两个企业同时选择是否进入。记“进入”为 E ，“不进入”为 N 。若两个企业都进入，每个报酬为 A ；若只有一个企业进入，进入者报酬为 B ，未进入者报酬为 0；若都不进入，则均为 0。

报酬矩阵为：

	企业 2: E	企业 2: N
企业 1: E	(A, A)	$(B, 0)$
企业 1: N	$(0, B)$	$(0, 0)$

从经济合理性看，若单独进入时获得垄断利润，两个都进入时获得竞争利润，通常应有

$$B > A.$$

同时一般假设

$$B > 0,$$

否则没有企业愿意单独进入。关键取决于 A 的符号：两个企业都进入是否还能盈利。

情形一： $A > 0$

若对方进入，本企业进入得到 $A > 0$ ，不进入得到 0，所以进入更好。若对方不进入，本企业进入得到 $B > 0$ ，不进入得到 0，所以仍然进入更好。

因此进入是严格占优策略，唯一纳什均衡为

$$(E, E).$$

经济含义是：即使市场由两家共同进入，仍有正利润，所以两个企业都会进入。

情形二： $A = 0$

若对方进入，本企业进入和不进入都得到 0，无差异；若对方不进入，本企业进入得到 $B > 0$ ，不进入得到 0，所以更愿意进入。

此时纳什均衡包括

$$(E, E), (E, N), (N, E).$$

其中 (E, E) 是弱均衡，因为当对方进入时，自己进入与不进入无差异。

情形三： $A < 0 < B$

若对方进入，本企业进入得到负收益 $A < 0$ ，不进入得到 0，所以不进入更好；若对方不进入，本企业进入得到 $B > 0$ ，所以进入更好。

因此有两个非对称纳什均衡：

$$\boxed{(E, N), (N, E)}.$$

经济含义是：市场只能容纳一家企业，若两家都进入会亏损，所以最终应由一家进入、另一家不进入。但由于企业是对称的，谁进入并不由纯策略静态博弈唯一决定。

小结

在经济合理假设 $B > A$ 、 $B > 0$ 下：

$$\boxed{\begin{cases} A > 0: & (E, E); \\ A = 0: & (E, E), (E, N), (N, E); \\ A < 0: & (E, N), (N, E). \end{cases}}$$

第 4 题：无穷重复 Bertrand 博弈与触发战略

解：每期市场需求为

$$p(Q) = a - Q,$$

所有企业边际成本均为 c 。若企业可以维持垄断价格，则先求垄断结果。垄断者最大化

$$\Pi = (p - c)Q = (a - Q - c)Q.$$

一阶条件：

$$\frac{d\Pi}{dQ} = a - c - 2Q = 0 \Rightarrow Q^M = \frac{a - c}{2}.$$

垄断价格为

$$p^M = a - Q^M = a - \frac{a - c}{2} = \frac{a + c}{2}.$$

总垄断利润为

$$\Pi^M = (p^M - c)Q^M = \left(\frac{a - c}{2}\right) \left(\frac{a - c}{2}\right) = \frac{(a - c)^2}{4}.$$

若 n 个企业合谋并平均分享市场，每个企业每期合谋利润为

$$\pi^C = \frac{\Pi^M}{n}.$$

在触发战略下，只要所有人都选择垄断价格，就继续合作；一旦有人不选择垄断价格，之后永远进入 Bertrand 竞争。由于同质产品 Bertrand 均衡价格为 $p = c$ ，惩罚期利润为 0。

现在比较“合作”与“一次性背叛”。

继续合作的现值

若某企业一直合作，每期获得 Π^M/n ，所以现值为

$$V_C = \frac{\Pi^M/n}{1 - \delta}.$$

背叛的现值

若某企业在本期略微低于垄断价格，它可以几乎抢占整个市场，得到接近全部垄断利润 Π^M ；从下一期开始受到冷酷惩罚，利润为 0。因此背叛现值为

$$V_D = \Pi^M.$$

垄断价格能够作为完美均衡结果，需要企业没有背叛动机：

$$V_C \geq V_D.$$

即

$$\frac{\Pi^M/n}{1 - \delta} \geq \Pi^M.$$

消去 $\Pi^M > 0$:

$$\frac{1}{n(1-\delta)} \geq 1.$$

整理得

$$1 \geq n(1-\delta) \quad \Rightarrow \quad \delta \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

因此最低贴现因子为

$$\delta^* = 1 - \frac{1}{n}.$$

δ 与 n 的关系

n 越大，单个企业在合谋中分到的当期利润 Π^M/n 越小，但背叛时仍可抢占接近全部市场，背叛诱惑相对更大。因此需要更高的耐心程度，也就是更高的贴现因子：

$$\frac{d}{dn} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2} > 0.$$

所以

$$n \text{ 越大, 维持合谋所需的最低 } \delta \text{ 越高。}$$

当 $n = 2$ 时, $\delta^* = 1/2$; 当 n 很大时, δ^* 接近 1, 合谋越来越难维持。

第 5 题：不完全信息古诺双头垄断的贝叶斯纳什均衡

解：市场反需求函数为

$$p(Q) = a - Q, \quad Q = q_1 + q_2.$$

两个企业成本均为

$$c_i(q_i) = cq_i.$$

需求状态不确定：

$$a = \begin{cases} a_H, & \text{概率 } \theta, \\ a_L, & \text{概率 } 1 - \theta. \end{cases}$$

企业 1 知道需求状态，企业 2 不知道需求状态。设

$$A_H = a_H - c, \quad A_L = a_L - c, \quad \bar{A} = \theta A_H + (1 - \theta) A_L.$$

其中 A_s 表示状态 $s \in \{H, L\}$ 下的需求截距相对于边际成本的净值。

(1) 战略空间

企业 1 是有信息企业，观察到状态后可以选择不同产量。因此企业 1 的纯策略是一个从状态集到产量集的函数：

$$s_1 : \{H, L\} \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

也就是说，企业 1 的策略可以写为

$$s_1 = (q_{1H}, q_{1L}),$$

其中 q_{1H} 是高需求状态下的产量， q_{1L} 是低需求状态下的产量。

企业 2 不知道状态，所以不能针对状态调整产量。企业 2 的纯策略就是一个单一产量：

$$s_2 = q_2 \in \mathbb{R}_+.$$

因此战略空间为

$$\boxed{S_1 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad S_2 = \mathbb{R}_+}.$$

(2) 企业 1 的最优反应

给定企业 2 产量 q_2 ，在状态 $s \in \{H, L\}$ 下，企业 1 利润为

$$\pi_{1s} = (p - c)q_{1s} = (a_s - q_{1s} - q_2 - c)q_{1s}.$$

使用 $A_s = a_s - c$ ，可写为

$$\pi_{1s} = (A_s - q_{1s} - q_2)q_{1s}.$$

对 q_{1s} 求一阶条件：

$$\frac{\partial \pi_{1s}}{\partial q_{1s}} = A_s - 2q_{1s} - q_2 = 0.$$

所以企业 1 在状态 s 下的最优反应为

$$q_{1s} = \frac{A_s - q_2}{2}.$$

即

$$q_{1H} = \frac{A_H - q_2}{2}, \quad q_{1L} = \frac{A_L - q_2}{2}.$$

(3) 企业 2 的最优反应

企业 2 不知道状态，因此最大化期望利润：

$$\mathbb{E}\pi_2 = \theta(A_H - q_{1H} - q_2)q_2 + (1 - \theta)(A_L - q_{1L} - q_2)q_2.$$

对 q_2 求一阶条件。把 q_{1H}, q_{1L} 视为给定：

$$\frac{\partial \mathbb{E}\pi_2}{\partial q_2} = \theta(A_H - q_{1H}) + (1 - \theta)(A_L - q_{1L}) - 2q_2 = 0.$$

因此

$$q_2 = \frac{1}{2} [\theta(A_H - q_{1H}) + (1 - \theta)(A_L - q_{1L})].$$

(4) 联立求贝叶斯纳什均衡

代入企业 1 的反应函数

$$q_{1s} = \frac{A_s - q_2}{2}.$$

于是

$$A_s - q_{1s} = A_s - \frac{A_s - q_2}{2} = \frac{A_s + q_2}{2}.$$

企业 2 的一阶条件变为

$$q_2 = \frac{1}{2} \left[\theta \frac{A_H + q_2}{2} + (1 - \theta) \frac{A_L + q_2}{2} \right].$$

括号内化简：

$$\theta(A_H + q_2) + (1 - \theta)(A_L + q_2) = \theta A_H + (1 - \theta)A_L + q_2 = \bar{A} + q_2.$$

所以

$$q_2 = \frac{\bar{A} + q_2}{4}.$$

整理：

$$4q_2 = \bar{A} + q_2 \quad \Rightarrow \quad 3q_2 = \bar{A} \quad \Rightarrow \quad q_2^* = \frac{\bar{A}}{3}.$$

再代回企业 1 反应函数：

$$q_{1s}^* = \frac{A_s - q_2^*}{2} = \frac{A_s - \bar{A}/3}{2} = \frac{3A_s - \bar{A}}{6}.$$

因此

$$q_{1H}^* = \frac{3A_H - \bar{A}}{6}, \quad q_{1L}^* = \frac{3A_L - \bar{A}}{6}, \quad q_2^* = \frac{\bar{A}}{3}.$$

写回原参数：

$$\bar{A} = \theta(a_H - c) + (1 - \theta)(a_L - c) = \theta a_H + (1 - \theta)a_L - c.$$

所以贝叶斯纳什均衡为

$$q_2^* = \frac{\theta(a_H - c) + (1 - \theta)(a_L - c)}{3},$$

$$q_{1H}^* = \frac{3(a_H - c) - [\theta(a_H - c) + (1 - \theta)(a_L - c)]}{6},$$

$$q_{1L}^* = \frac{3(a_L - c) - [\theta(a_H - c) + (1 - \theta)(a_L - c)]}{6}.$$

题目已假定参数范围保证所有均衡产出为正，因此上述内点一阶条件解就是所求贝叶斯纳什均衡。

经济直觉

企业 1 有信息优势，所以它能在高需求时多产、低需求时少产：

$$q_{1H}^* - q_{1L}^* = \frac{3(A_H - A_L)}{6} = \frac{A_H - A_L}{2} > 0.$$

企业 2 没有信息，只能根据期望需求强度 $\bar{A}$ 选择一个折中产量：

$$q_2^* = \frac{\bar{A}}{3}.$$

这就是不完全信息下贝叶斯均衡和完全信息古诺均衡的核心区别：有信息企业的策略依赖于状态，无信息企业的策略依赖于信念。